

19. Определение точного, непрерывного и остаточного спектра. Примеры оператора умножения на переменную в $C(0,1)$ и $L_2(0,1)$, оператора сдвига в ℓ_2

$\lambda \in \mathbb{C}(X \rightarrow X)$, X - банах. пр-во

If $\ker(\lambda - \lambda E) \neq \emptyset$, то λ - **точка точного спектра** или с.з. мн-во таких λ обозн-ся $\sigma_p(\lambda)$

If $\ker(\lambda - \lambda E) = \emptyset$, $\mathcal{R}(\lambda - \lambda E) \neq X$, но $\overline{\mathcal{R}(\lambda - \lambda E)} = X$, то λ - **нпр. спектра**. мн-во таких точек: $\sigma_c(\lambda)$

If $\ker(\lambda - \lambda E) = \emptyset$, $\overline{\mathcal{R}(\lambda - \lambda E)} \neq X$, то λ - **т. остаточн. спектра**. мн-во таких точек: $\sigma_r(\lambda)$

$$\sigma(\lambda) \equiv \sigma_p(\lambda) \cup \sigma_c(\lambda) \cup \sigma_r(\lambda)$$

Примеры операторов умножения на переменную

1. $X = C[0,1]$, $\|x\| = \max_{t \in [0,1]} |x(t)|$

$\lambda: \lambda x = t x(t) \Rightarrow \|\lambda\| \leq 1$ λ - оп-р умнож-я на переменную

• if $|\lambda| > 1 \geq \|\lambda\|$, то λ - регулар. т. ($\lambda \notin \sigma(\lambda)$)

$$\lambda x - \lambda x = y \Rightarrow (t - \lambda)x = y \Rightarrow x(t) = y(t) / (t - \lambda)$$

• if $\lambda \in [0,1]$

$\ker(\lambda - \lambda E) = \emptyset$ (т.к. у $(t - \lambda)x(t)$ нет нетривиал. реш-я (р/регулар. т.))

$$\lambda (t - \lambda)x(t) = y(t) \Rightarrow \lambda = t \Rightarrow y(t) = 0, \text{ т.е. ур-е разрешимо не д/т}$$

прав. части $\Rightarrow \mathcal{R}(\lambda - \lambda E) \neq X$, $\overline{\mathcal{R}(\lambda - \lambda E)} = X$ (при замыкании в ссхр-ся) $\Rightarrow \lambda$ - т. остаточн. спектра

2. $X = L_2(0,1)$

$$\|x\|_{L_2} = \sqrt{\int_0^1 |x(t)|^2 dt}$$

$\lambda: \lambda x = t x(t) \Rightarrow \|\lambda\| \leq 1$

• if $|\lambda| > 1 \geq \|\lambda\|$, то λ - регулар. т. ($\lambda \notin \sigma(\lambda)$)

$$\lambda x - \lambda x = y \Rightarrow (t - \lambda)x(t) = y(t), \ker(\lambda - \lambda E) = \emptyset \forall \lambda \text{ (т.к. if } y(t) = 0, \text{ то } x(t) \neq 0)$$

$$x(t) = \frac{y(t)}{t - \lambda} \text{ - реш-е при регулар. т.}$$

• if $\lambda \in [0,1]$

$$\exists y_0(t) = \begin{cases} y(t), & |t - \lambda| > \delta \\ 0, & |t - \lambda| < \delta \end{cases} \Rightarrow x_0(t) = \frac{y_0(t)}{t - \lambda} \in L_2(0,1), \text{ т.е. } \exists! \text{ уст. реш-е д/т}$$

ф-ций, обнуляющихся возле λ .

$\|y - y_0\|_{L_2(0,1)}^2 = \int_0^1 |y(t) - y_0(t)|^2 dt \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$ (в силу ато. непр-ти L_2 Лебега) $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ ин-во y_0 плотно в $X \Rightarrow \overline{R(A - \bar{\partial}E)} = X \Rightarrow \bar{\partial}E \in [0, 1]$ - т. непр. спектра

3. $H = l_2$

$$X = (x_1, \dots, x_n, \dots), \|x\|_{l_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$$

$$\bar{\partial}: \bar{\partial}x = (0, x_1, x_2, \dots)$$

• if $|\bar{\partial}| > 1 > \|\bar{\partial}\|$, то $\bar{\partial}$ - пер. т.

$$(\bar{\partial} - \bar{\partial}E)x = 0 \Rightarrow \bar{\partial}x = \bar{\partial}Ex \Rightarrow (0, x_1, x_2, \dots) = (\bar{\partial}x_1, \bar{\partial}x_2, \dots)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{\partial} \neq 0 \Rightarrow \bar{\partial}x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = 0, \bar{\partial}x_2 = x_1 \Rightarrow x_2 = 0 \Rightarrow \dots \Rightarrow x = 0 \\ \bar{\partial} = 0 \Rightarrow \text{хочевидно} \Rightarrow x = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \ker(\bar{\partial} - \bar{\partial}E) = \{0\}$$

$\Rightarrow$ [разрешимость ($|\bar{\partial}| > 1$), т.е. пер. т.]

$$(\bar{\partial}^* - \bar{\partial}E)x = 0 \Rightarrow \bar{\partial}^*x = \bar{\partial}Ex \Rightarrow (x_2, x_3, \dots) = (\bar{\partial}x_1, \bar{\partial}x_2, \dots)$$

$$x_2 = \bar{\partial}x_1, x_3 = \bar{\partial}x_2 = \bar{\partial}^2x_1 \Rightarrow x_n = \bar{\partial}^{n-1}x_1, \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty \Rightarrow |\bar{\partial}| < 1 \Rightarrow \exists \text{ соотв. эл-ты } (x_1, \bar{\partial}x_1, \bar{\partial}^2x_1, \dots) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ [целый круг с з.н.] $\Rightarrow$ [$|\bar{\partial}| < 1$] - точечный спектр $g/\bar{\partial}^*$

известно, что if B -оп., то $H = \overline{R(B)} \oplus \ker B^*$

$$\bar{\partial} = \bar{\partial} - \bar{\partial}E, |\bar{\partial}| < 1: \ker(\bar{\partial}^* - \bar{\partial}E) \neq 0, H = \overline{R(\bar{\partial} - \bar{\partial}E)} \oplus \ker(\bar{\partial}^* - \bar{\partial}E)$$

$$\Rightarrow \overline{R(\bar{\partial} - \bar{\partial}E)} \neq H = \overline{[|\bar{\partial}| < 1]} \text{ - остаточный спектр } g/\bar{\partial}$$

• if $|\bar{\partial}| = 1$

Спектр-замкн ин-во, $|\bar{\partial}| < 1 \in \text{спектру} \Rightarrow |\bar{\partial}| = 1$ тоже ин спектра

$$H = \overline{R(\bar{\partial} - \bar{\partial}E)} \oplus \ker(\bar{\partial}^* - \bar{\partial}E) \Rightarrow H = \overline{R(\bar{\partial} - \bar{\partial}E)} \oplus \overline{[|\bar{\partial}| = 1]} \text{ - т. непр. спектра } g/\bar{\partial}$$

$$H = \overline{R(\bar{\partial}^* - \bar{\partial}E)} \oplus \ker(\bar{\partial} - \bar{\partial}E) \Rightarrow H = \overline{R(\bar{\partial}^* - \bar{\partial}E)} \Rightarrow [|\bar{\partial}| = 1 \text{ - т. непр. спектра } g/\bar{\partial}^*]$$